総合都市研究　第60号 1996

円形と長方形
—住宅や部屋の形状の決定要因—

浅 見 泰 司*

要　　約

住宅や部屋の平面形状の最適化問題を考察する。現実には、長方形及び円形のものが多いが、それには、その形状を選択した合理的な理由があるはずである。壁材消費を最小化する場合には、部屋の形状はいくつかの円弧によって構成される。活動領域の配置可能性を表す活動自由度を最大化した場合にも、部屋の配置がやや互いに遠くなるだけで、基本的には境界長最小化問題に帰着する。長方形の部屋が多い理由としては、最適分割性、空間充填性、非鋭角性、直線性、形状パラメータの少ないことなどが考えられる。

1. はじめに

住宅や部屋の形状はどのような要因で決まるのだろうか。我々が住宅を設計するとき、部屋の形状は長方形（または、その変形）にする。このことは、ほとんど当然のように思われているが、その理由を考えてみると、意外に難しい。

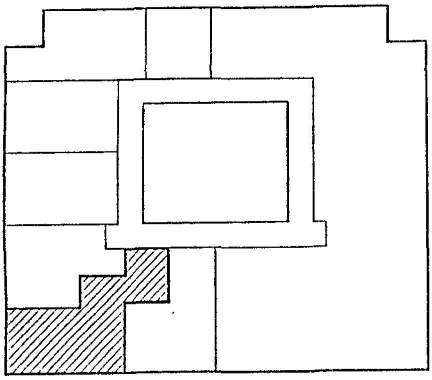
長方形の部屋は直線素で構成されているので、家具を置きやすい。しかし、この事実も、実は長方形状の部屋が多いために、直線素や直角を用いた家具が多く生産されているのかもしれない。家具に長方形のものが多いために部屋が長方形であるならば、なぜ家具が長方形なのかという新たな疑問が生じてしまう。つまり、形状を決定する要因を他の要素形状で説明するとき、その要素形状に理由を求めると、新たな（そして、しばしば相互に関連した）形状問題が発生してしまうのである。

ところで、部屋の形状は長方形に限られているわけではない、特に大規模なタワー型共同住宅では、角にある住宅などは、その階の平面分割の必要性から、いくつもの長方形が斜めに連なったような形状をしていることがある（図1a参照)。これは明らかに住戸や部屋の平面充填性や住戸の共通通路へのアクセスの確保などから、仕方なく発生した形状であると言える。それでも、基本形は長方形で、その拡張としてこのような形状がある。

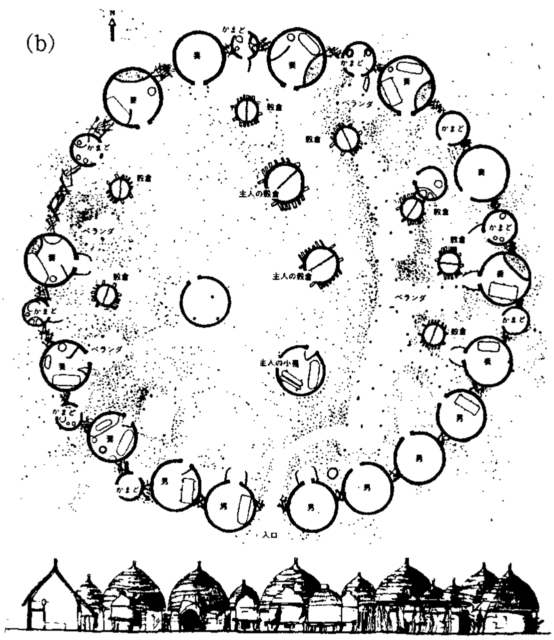
ところで、住宅にしても部屋にしても長方形またはその「亜種」としてL字形などばかりではな

* 東京大学大学院工学系研究科都市工学専攻

(a)



(b)



(c)

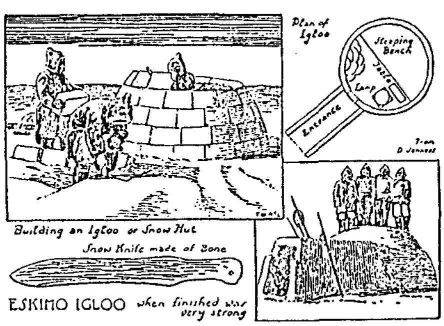


図1 様々な形状の住宅
((b) ベネーヴォロ (1983), p.15、(c) 吉阪 (1965), p.62)

い。もうひとつの重要な形状として円形がある。図1bおよびcに、カメルーンの村（ベネーヴォロ, 1983）とエスキモーのイグルー住宅（吉阪,1965）を示す。これらの住宅の特徴は、独立性が強いことである。カメルーンの村の住宅では、各個人が別々のハットになっているし、イグルー住宅では、外壁自体が極寒の地において、内部を完全に保護するために半球状となっている。

本稿では、これら長方形や円形を形作る理由について考察する[1]。長方形にしても円形にしてもそれなりに、その形状を選択した理由があるはずである。その理由の中には、別の形状でもかまわないものもあれば、他の形状では劣ってしまう理由もあろう。後者の理由こそ、住宅や部屋の形状を決定づける要因と考えることができる。

2．なぜ円形か

まず、なぜ円形かという問いを考えてみたい。寒冷地で建物からの熱放射を防ぐ場合、建材自体が高価な場合、そして移動生活を行うために建材自体をなるべく軽量化したい場合などは、住宅における壁材消費量を最小化することが重要となる。その際には、住宅の形状を決定する問題は、内部の空間容量（面積）を一定にしながら、境界部分の測度（境界長）を最小化する問題に帰着する。

一部屋だけの戸建住宅の場合から考えてみよう。Aを住宅の形状とする。Aの面積及び境界長をそれぞれ$\mathbf{A}(A)$、$\mathbf{B}(A)$で表すことにする。すると、ここでの住宅形状決定問題は、Cを正の定数として以下のように定式化される。

$$\mathrm{MIN}_A\,\mathbf{B}(A)\ \mathrm{s.t.}\ \mathbf{A}(A)=C,$$

Aが閉曲線であるならば、変分法を用いると、Aは円でなければならない（Craggs, 1973)。

このことを念頭において、図1のb, cで示したカメルーンの村とエスキモーのイグルー住宅について考えてみよう。

カメルーンの高温多湿の気候に居住する人々は木や草を建材として用いる。図を見るとプライバシーを確保するために、全ての部屋が分かれている。建材を最も有効に使うには円形の部屋が良い

ことを述べたが、これはその典型例となっている。しかも、村全体の形状も共通スペースをなるべく大きくとるために円形となっている。例外は、首長の部屋（及び倉庫）であるが、これは構成員によって保護される必要があり、逆に首長は構成員を見張る必要があるからではないかと考えられる。

エスキモーの人々も円形の住宅に居住する。極寒冷地に居住し、建材にも事欠く彼らは、大きな氷塊を住宅建材として用いる。煉瓦積みのように住宅を建設することも可能ではあったろうが、実際には半球形を選択した。寒冷地に居住する場合、住宅を建設するにあたって重要なことは、屋内を暖かく保つことである。屋内容積を固定して、空中への熱放射を最小化すると、最適形状は半球形となる。まさにその形状をエスキモーの人々は選択したのである[2)]。

これと類似の形状決定問題が、March（1972）によって分析されている。彼は住棟からの熱放射が最小となる住棟の形状について分析している。ただし、住棟の形状を直方体と限定した中で最適化しているため、当然ながら解としての最適形状も直方体である。上のイグルー住宅の場合には、形状自体を直方体に限定する必要がないからこそ、半球状の形状を選んだのだと言えよう。

以上の例は非常に限られてはいるが、ひとつの基本的な原理を示唆している。すなわち、部屋にしろ、住宅にしろ、その形状を選択するにはそれなりの合理的な理由があるということである。上記の例では、内部体積を確保しながら壁財（天井材を含む）の量を最小化するという原理である。

3．壁材最小化と住宅形状

戸建住宅でも部屋が複数室になると、最適形状は一般的に円形であるとは言えない。以下では分析の便のため、2次元形状に限定して分析する。複数室ある場合には、2種類の壁がある。ひとつは住宅の内外を仕切る外壁であり、もうひとつは住宅の内部で部屋を仕切る内壁である。外壁と内壁は多くの場合異なる材料からできている。外壁は激しい風雨から家を守らねばならず、そのため内壁よりも多くの材料が投入される。他方、内壁は家の中では単なる間仕切りであることも多く、さほど堅固である必要もない。従って、外壁は内壁よりも単価が高くなる。

この要素を取り入れるために、外壁材の費用に対する内壁材の費用の比率を表す非負の係数kを定義する[3)]。kは0から1の間の実数とする。外壁と内壁を区別するために、Aの外壁の長さを$\mathbf{B}_E(A)$、内壁の長さを$\mathbf{B}_I(A)$と定義する。すると壁材の消費量は$\mathbf{B}_E(A)+k\,\mathbf{B}_I(A)$と表すことができる。

同じ規模の部屋が2部屋で構成される住宅について考えてみよう。対称的な場合のみを考えれば十分である。内壁の長さを$2a$とする[4)]。$k>0$ならば、変分法により、外壁は円弧の一部となることを示すことができる。円の半径をr、円の中心と内壁との距離をhで表す。ただし、hは円の中心がその部屋に含まれる場合に非負、さもなければ負となるように符号をつけた距離とする（図2参照）。住宅の面積、外壁の長さ、内壁の長さはそれぞれ以下のように求められる。

$$\mathbf{A}(A)=2r^2[\pi-\arccos(h/r)]+2h(r^2-h^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{B}_E(A)=4r[\pi-\arccos(h/r)]$$

$$\mathbf{B}_I(A)=2(r^2-h^2)^{1/2}$$

壁材最小化問題は以下のように定式化できる。

$$\mathrm{MIN}_{r,h}\,\mathbf{B}_E(A)+k\,\mathbf{B}_I(A)\ \mathrm{s.t.}\ \mathbf{A}(A)=2C$$

ただし、Cは一部屋の面積を表す正の定数である。

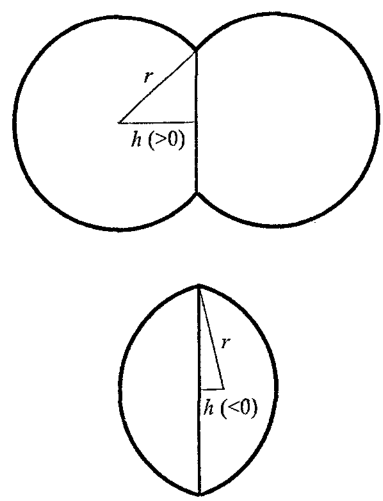


図2　記号の定義

この問題のラグランジュ関数Lは、λをラグランジュの未定乗数として以下のように表すことができる（Intriligator, 1971）。

$$L=4r[\pi-\arccos(h/r)]+2k(r^2-h^2)^{1/2}$$
$$+\lambda[C-r^2(\pi-\arccos(h/r))-h(r^2-h^2)^{1/2}]$$

上記の式を r と h について偏微分し、それを0と等しいとおくことにより以下の2つの式が導かれる。

$$(4-2\lambda r)[\pi-\arccos(h/r)]+(2kr-4h)(r^2-h^2)^{-1/2}=0$$
$$2r-kh-\lambda(r^2-h^2)=0$$

2つめの式を λ について解き、1つめの式に代入すると、

$$2(kr-2h)[h(\pi-\arccos(h/r))+(r^2-h^2)^{1/2}]=0$$

となる。従って、

$$h=kr/2$$

が成り立つ。

$k=0$、すなわち、内壁の費用は無視できるものとすると、この問題は一部屋住宅の場合に帰着する。解は、$h=0$ で、住宅は円形となり、図3に示すように2部屋は半円形となる[5)]。

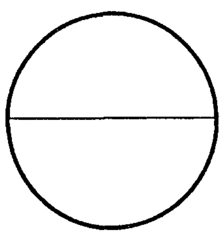


図3　内壁費用が無視できる場合の最適2部屋住宅

もう一方の極限状態である$k=1$ の場合、すなわち、内壁と外壁の費用が同じである時は、解は $h/r=1/2$ となり、図4に示すように各部屋は 2/3 円弧と線分で構成される、$k=1$ の場合は、本節の問題は、石鹸泡の形状問題の2次元の場合となり、Thompson (1952) などで、詳しく分析されている。

次に2部屋の大きさが異なる場合を考えてみよう。内壁の両端点間の直線距離を$2a$ とする[6)]。図5に示すように、内壁を極座標表示で表した関数を$f(\theta)$とする（θ が通常と異なるように定義されていることに注意）。外壁は2つの円弧の一部で構成されるから、h_1 とh_2 を第3節と同様に、中心点が線分

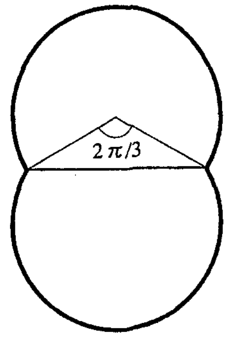


図4　内壁が外壁と等価な場合の最適2部屋住宅

$[-a, a]$ に対して部屋側の場合に非負となり、さもなければ負となるような符号付き距離として定義する。部屋 i の面積 A_i 及び部屋 i の外壁長 $L_i(i=1,2)$、内壁長Dは、以下のように表すことができる。

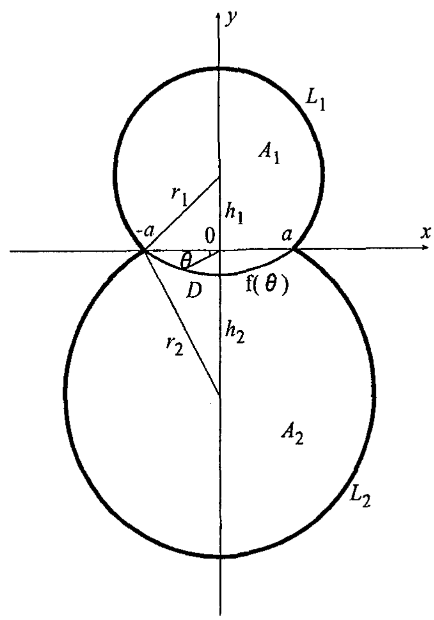


図5　変数の定義

$$A_i=\mathrm{F}(a,h_i)-(-1)^i\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\mathrm{f}(\theta)]^2\,d\theta$$
$$L_i=\mathrm{G}(a,h_i)$$
$$D=\int_0^{\pi}\sqrt{[\mathrm{f}(\theta)]^2+[\mathrm{f}'(\theta)]^2}\,d\theta$$

ただし、f' は関数 f の導関数であり、

$$\mathrm{F}(a,h)=(a^2+h^2)(\pi-\arccos[h(a^2+h^2)^{-1/2}])+ah$$
$$\mathrm{G}(a,h)=2(a^2+h^2)^{1/2}(\pi-\arccos[h(a^2+h^2)^{-1/2}])$$

とする。面積条件のもとで、L_1+L_2+kD を最小化する。部屋 i の面積条件に関するラグランジュ未定乗数 λ_i とすると、この最適化問題のオイラーの微分方程式は、$\lambda=(\lambda_2-\lambda_1)/k$ とおいて、

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}^2+\mathrm{f}'^2)^{-1/2}-\lambda\,\mathrm{f}-(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)[\mathrm{f}'(\mathrm{f}^2+\mathrm{f}'^2)^{-1/2}]=0$$

となる。この方程式を解くと、$\mathrm{f}(\theta)$ は以下のように表現できる。

$$\mathrm{f}(\theta)=\frac{a(\cos\phi\sin\theta+\sqrt{1-\cos^2\phi\cos^2\theta})}{\sin\phi}$$

ただし、$\phi\in[0,\pi]$ は円のパラメータである。上記の問題の解は以下の a,ϕ,h_1,h_2,λ_1 and λ_2 に関する連立方程式を解くことによって得られる。

$$\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial G(a,h_i)}{\partial a}-\lambda_i\frac{\partial F(a,h_i)}{\partial a}\right]$$

$$+k\left[\frac{2\phi}{\sin\phi}+\frac{2\lambda a(\phi-\sin\phi\cos\phi)}{\sin^2\phi}\right]=0$$

$$\frac{\partial G(a,h_i)}{\partial h_i}-\lambda_i\frac{\partial F(a,h_i)}{\partial h_i}=0 \quad (i=1,2)$$

$$\sin\phi-\phi\cos\phi+\lambda a(1-\phi\cos\phi/\pi)=0$$

$$A_i=F(a,h_i)-(-1)^i a^2(\phi-\sin\phi\cos\phi)/\sin^2\phi \quad (i=1,2)$$

$A_1/A_2=1/4$ および $k=1/2$ の場合の解の例を図6に示す。

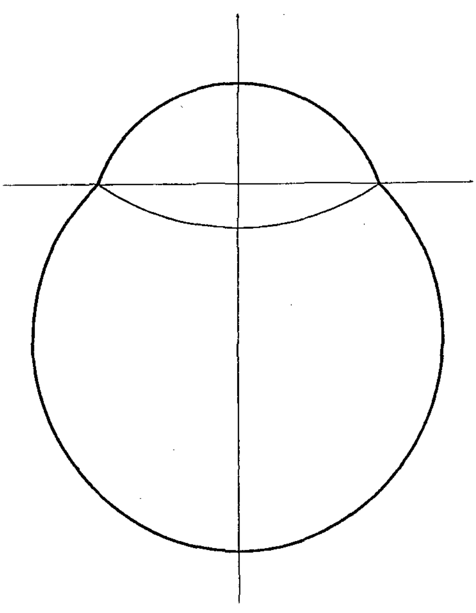


図6　大きさの異なる2部屋の最適住宅

さらに、3部屋で構成される戸建住宅を考えよう。この場合、2つの配置パターンがある。ひとつは、3部屋が順に並んでいるパターンであり、もうひとつは、3部屋が互いに接しているパターンである。分析の単純化のため、3部屋とも同じ大きさであるとする。

まずは3部屋が連続して並んでいるパターンについて考える。対照的な配置のみ考えれば良いから、両端の部屋は合同で3部屋の中心がすべて同一直線上にのる場合のみを考えればよい（図7参照）。図7に示すように、両端の部屋は2つの（大きさの異なる）円弧を端点を合わせるようにつなげた形状となり、中央の部屋の外壁は円弧となる。

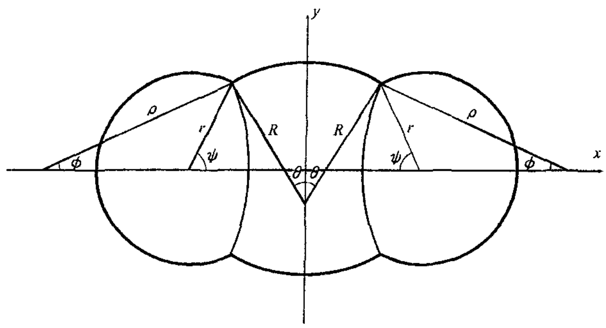


図7　3部屋の連続配置パターン

中央の部屋の最適形状を求めるためには、部屋の面積を一定にして、円弧の長さを最小化するように、内壁間の距離と外壁の円弧を求める必要がある。図7に定義した記号を用いると、住宅の面積 $\mathbf{A}(A)$、外壁の全長 $\mathbf{B}_\mathrm{E}(A)$、内壁の全長 $\mathbf{B}_\mathrm{I}(A)$ は以下のようになる。

$$\mathbf{A}(A)=2r^2(\pi-\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)+2R^2(\theta-\sin\theta\cos\theta)+4rR\sin\varphi\sin\theta$$

$$\mathbf{B}_\mathrm{E}(A)=4r(\pi-\varphi)+4R\theta$$

$$\mathbf{B}_\mathrm{I}(A)=4\rho\,\phi$$

住宅形状最適化問題は以下のように定式化される。

$$\mathrm{MIN}_{r,R,\rho,\theta,\varphi,\phi}\ \mathbf{B}_\mathrm{E}(A)+k\mathbf{B}_\mathrm{I}(A)$$

$$\text{s.t. } r^2(\pi-\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)+\rho^2(\phi-\sin\phi\cos\phi)=C$$

$$2R^2(\theta-\sin\theta\cos\theta)-2\rho^2(\phi-\sin\phi\cos\phi)+4rR\sin\varphi\sin\theta=C$$

$$r\sin\varphi=\rho\sin\phi$$

ただし、C は一部屋の面積を表す正の定数である。

中央の部屋の外壁を構成する2つの円弧の円の中心が部屋の中心と一致したときに最適になっている。

次に、3部屋とも互いに接した配置パターンについて考えてみよう。対称な場合に限って分析すればよいので、図8にあるように、互いに$2\pi/3$の角度で交わる線分の内壁と内角が2θの3つの円弧の外壁で構成される場合について分析する。

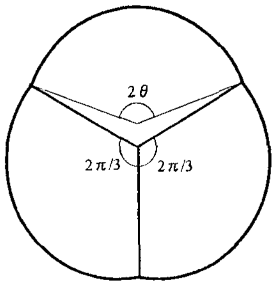


図8　3部屋の互いに接する配置パターン

円弧の円の半径をrとすると、住宅面積$\mathbf{A}(A)$、外壁長$\mathbf{B}_E(A)$、内壁長$\mathbf{B}_I(A)$はそれぞれ、

$$\mathbf{A}(A)=(3\theta-3\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3}\sin^2\theta)r^2$$

$$\mathbf{B}_E(A)=6\theta r$$

$$\mathbf{B}_I(A)=2\sqrt{3}r\sin\theta$$

となる。よって、住宅形状最適化問題は以下のように定式化できる。

$$\mathrm{MIN}_{r,\theta}\ \mathbf{B}_E(A)+k\,\mathbf{B}_I(A)$$

$$\mathrm{s.t.}\quad \mathbf{A}(A)=3C$$

ただし、Cは一部屋の面積を表す正の定数である。この問題の解は以下のように求められる。

$$\theta=\pi/3+\arcsin(k/2)$$

$$r=\sqrt{\frac{C}{\theta+\frac{k\sin\theta}{\sqrt{3}}}}$$

$$\mathbf{B}_E(A)+k\,\mathbf{B}_I(A)=6\sqrt{C(\theta+\frac{k\sin\theta}{\sqrt{3}})}$$

以上の2つの配置パターンの解を比較すると、3部屋が互いに接する配置パターンの方が最適である[7]。$k=1$、すなわち内壁と外壁の単位費用が同じ時は、$\theta=\pi/2$及び$r=[6C/(\pi+3^{1/2})]^{1/2}$となり、図9に示すように住宅全体の形状は3つの半円が正三角形の各辺にひとつずつついた形状となる。また、$k=0$、すなわち内壁の費用が無視できる場合には、住宅全体の形状が円形となる[8]。

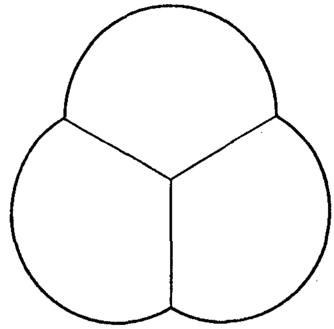


図9　部屋の大きさが全て同じ3部屋最適住宅($k=1$)

4．活動自由度基準

前節では壁材の消費の最小化概念を扱った。しかし、現実には他の要素に比べて壁材費用はさほど重要でないことも多い。そこで、住宅形状を最適化する基準として新たな指標を考察する。

住宅の構成要素である部屋について考えてみよう。部屋とは、具体的には寝室、居間、食事室、台所、浴室など様々である。どの部屋も、そこで行われる活動が可能なように十分な広さが必要である。そのためには、日常生活に必要な活動を収めることができるように、部屋の形状も設計することが望まれる。

各部屋で日常的な活動として何があるかをすべて列挙することは困難だが、どのような活動もある程度の広さが必要となるのは確かである。しかも活動自体は静的なものとは限らず、ある程度動く自由が必要だろう。従って、納めるだけの空間だけでなく、ある程度自由に配置できる可能性も必要とされると言えよう。

部屋で行われる活動のうち重要なものがいくつかあるとする。活動には動きが伴うと予想されるため、その活動がスムーズに行うことの出来る空間の包絡線を凸領域で近似できるものとする。すると、部屋はそのような領域を全て個々に含むことができるほど十分な広さがなくてはならないこ

となる。

台所や浴室などの機能的な部屋のように、一度設備を設置したらそれを動かすことはないような部屋を除くと、部屋の中でそれぞれの活動を行う場所を変えることができることが好まれる。例えば、寝室においてベッド、箪笥などの家具の位置をたまに変更することがある。このことは、活動するために最小限必要な空間が部屋に納まるだけでなく、最小空間を自由に配置できる自由度も必要であることを示している。

この概念は以下のように数学的に表現できる。部屋内部の空間をAとし、それは2次元のユークリッド空間のコンパクトな部分集合であるとする。部屋の中で行われるべき重要な活動の番号集合をIとし、i番目$(i \in I)$の活動の最小限必要空間をa_iとする。a_iも2次元のユークリッド空間のコンパクトで凸な部分集合とする。a_iのAにおける「配置自由度」の測度$\mathrm{f}(a_i, A)$を、

$$\mathrm{f}(a_i, A) = \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(A \ominus a_i^{\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

で定義する。ただし、a_i^{θ}はa_iをθだけ回転した集合、

$$A \ominus a_i^{\theta} = \bigcap_{y \in a_i^{\theta}} \{x+y : x \in A\}$$

そして、$\mathbf{A}(.)$は領域の面積を表す[9]（Serra, 1982）。この測度は、以下のような意味を持つ。aをベッドの形状、Aを寝室とする。そして、ベッドを寝室の中でどの程度自由に配置できるかを考えてみよう。aの中の1点をyとし、参照点として用いる。すると、$A \ominus a$は、aがAに含まれるようなyの位置の集合となる。すなわち、ベッドの方向を変えずにベッドaを寝室Aの中で動かすと、参照点yが存在できる領域が$A \ominus a$なのである。ベッドは方向を変えることもできるので、全てのベッドの方向について参照点yが存在できる領域を求め、それを加えたのが配置自由度$f(a, A)$である。やや不正確な言い方をすれば、この測度は部屋の中で可能なベッドの配置の「数」なのである。ただ、実際には連続無限個の数があるために、「数」のかわりに面積かける角度の測度を用いている。

部屋の中での活動$i(i \in I)$の重要性の重み係数をw_iとする。すると、部屋の「活動自由度基準」$\mathrm{U}(A)$を次式のように定義できる（Santaló, 1976）[10]。

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(A) &= \textstyle\sum_{i \in I} w_i \mathrm{f}(a_i, A)\\ &= \textstyle\sum_{i \in I} w_i [2\pi \mathbf{A}(A) + 2\pi \mathbf{A}(a_i) - \mathbf{B}(A)\mathbf{B}(a_i)]\\ &= 2\pi(\textstyle\sum_{i \in I} w_i)\mathbf{A}(A) + 2\pi[\textstyle\sum_{i \in I} w_i \mathbf{A}(a_i)]\\ &\quad - \mathbf{B}(A)[\textstyle\sum_{i \in I} w_i \mathbf{B}(a_i)]\end{aligned}$$

ただし、$\mathbf{B}(.)$は集合の境界長を表す。

さて、活動自由度基準を最大化すれば良いのだが、もしも境界長を一定すなわち$\mathbf{B}(A) =$一定、または面積一定すなわち$\mathbf{A}(A) =$一定のもとで活動自由度基準を最大化すると、面積$\mathbf{A}(A)$を所与にして境界長$\mathbf{B}(A)$を最小化する問題と等価になる。このため、1部屋住宅の最適形状は円形であり、第2節の解と一致する。

住宅が複数の部屋で構成されている場合には、壁材消費最小化の場合と最適形状は一致するとは限らない。大きさの同じ2部屋で構成される住宅を考えてみよう。住宅Aの外壁長と内壁長をそれぞれ、$\mathbf{B}_{\mathrm{E}}(A)$と$\mathbf{B}_{\mathrm{I}}(A)$とする。活動自由度基準による活動自由度基準は、

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(A) &\equiv 2\pi(\textstyle\sum_{i \in I} w_i)\mathbf{A}(A) + 2\pi[\textstyle\sum_{i \in I} w_i \mathbf{A}(a_i)]\\ &\quad - \mathbf{B}(A)[\textstyle\sum_{i \in I} w_i \mathbf{B}(a_i)]\end{aligned}$$

となる。ただし、$\mathbf{B}(A)$は部屋の境界の全長であり、$\mathbf{B}_{\mathrm{E}}(A) + 2\mathbf{B}_{\mathrm{I}}(A)$に等しい。適切な束縛条件を選ぶのはやや難しい。部屋の面積を一定とすると、解は2つの円形をした部屋が独立にある配置となる。また、壁材の消費が一定という条件を設定することもできる。この場合は、今までのようにkを0と1の間の定数で、内壁材の外壁材に対する費用比率であるとして、条件式は、

$$\mathbf{B}_{\mathrm{E}}(A) + k\,\mathbf{B}_{\mathrm{I}}(A) = \text{一定}$$

となる。式を簡略化するため、

$$\alpha \equiv 2\pi(\textstyle\sum_{i \in I} w_i)$$

$$\beta \equiv \textstyle\sum_{i \in I} w_i \mathbf{B}(a_i)$$

$$\gamma \equiv 2\pi[\textstyle\sum_{i \in I} w_i \mathbf{A}(a_i)]$$

とおく。これらは、全て正である。以上の記号を用いると、住宅形状最適化問題は、

$$\mathbf{A}(A) = 2r^2(\pi - \theta + \sin\theta\cos\theta)$$

$$\mathbf{B}_{\mathrm{E}}(A) = 4r(\pi - \theta)$$

$$\mathbf{B}_{\mathrm{I}}(A) = 2r\sin\theta$$

そして、Dは壁材の消費量を表す正の定数として、

$$\mathrm{MAX}_A\, \alpha\,\mathbf{A}(A) - \beta[\mathbf{B}_{\mathrm{E}}(A) + 2\mathbf{B}_{\mathrm{I}}(A)] + \gamma$$

$\text{s.t.}\ \mathbf{B}_E(A)+k\mathbf{B}_I(A)=D$

と表すことができる。この問題を解くと、以下の関係式が導かれる。

$2\cos\theta-k=(2-k)[2\beta/(\alpha D)][2(\pi-\theta)+k\sin\theta]$

$r=D/\{2[2(\pi-\theta)+k\sin\theta]\}$

a_i は部屋よりも小さいため、$(\sum_{i\in I}w_i\mathbf{B}(a_i))/(\sum_{i\in I}w_i)$ は a_i の境界長の重み付き平均であり、$D/2$ は全壁長の半分だから、

$4\pi\beta/(\alpha D)=[(\sum_{i\in I}w_i\mathbf{B}(a_i))/(\sum_{i\in I}w_i)]/(D/2)<1$

と仮定できる。この場合、上記の第一の関係式の解 θ が $[0,\pi]$ の範囲で存在する。しかも、k' を

$k'=k+(2-k)[\beta/(\alpha r)]<k+(2-k)(D/4\pi r)<2$

とおくと、

$\cos\theta=k'/2$

であることを示すことができる。上記 k' は、$k'>k$ を満たしている。従って、解はパラメータの k を大きめにした場合の第3節で求めた解と等価になる。そのため、2部屋は第3節の解より離れた配置となる。活動自由度基準を適用すると図10に示すように、より外壁部分の円弧が長くなるように最適形状が求められる。

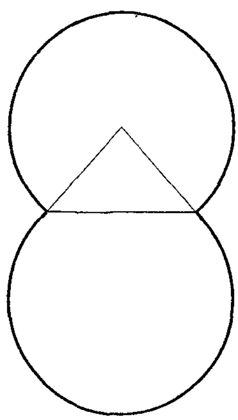


図10　活動自由度基準による大きさの同じ2部屋の最適住宅

5．なぜ長方形か

前節までは、住宅や部屋がなぜ円形もしくは円弧となるのかについて考えてきた。しかし、現実の部屋の多くは長方形が基本形となっている。そこで、本節ではなぜ長方形かについて考えたい。

住宅や部屋は、なぜ長方形が基本形とされるのかという問いはあまりに素朴なため研究があまりなされていない。その中で、Steadman (1992) は、なぜ長方形かという問いを考えた数少ない論考のひとつである。彼は、住宅が部屋の集合体で、住宅内を充填するように配置されること、長方形だと大きさが異なる部屋を充填する場合でも比較的容易に配置できること、家具が長方形を基準としていること、住宅の構造体も直線素を持つ素材（柱、煉瓦、ブロックなど）から構成されることなどを指摘している。示唆に富んでいるが、なお理論的に検討されるべき点を残している。

なぜ長方形かという問題を考えるには、2つの接近法があるだろう。ひとつは家や部屋の外形を規定する条件について考えていく方法であり、他方は部屋の内部の形状を規定する条件について考える方法である。

まず、外形条件について考えてみると、ひとつは部屋の集合体としての外形が特定の形状でなければならないという可能性がある。例えば、もし住宅が長方形でなければならないとすると、最適な部屋の形状決定問題として、長方形の最適分割問題を解けば良いことになる。例えば、2部屋住宅の場合に、2部屋の面積を所与として、内壁の長さを最小にするような内壁のありかたを考えてみよう。住宅の長方形形状の長辺、短辺の長さをそれぞれ、$a, b\ (a\geqq b)$ とする。2部屋のうち、面積の小さい方の部屋の面積を $C\ (2C\leqq ab)$ とする。内壁の配置の仕方は、2つある。

ひとつは、相対する辺に端点を置くような仕切り方である。この場合は、その辺に垂直な直線分の壁にすることが最適となる。もうひとつは、隣り合う2辺に端点を置くような仕切り方である。この場合は、壁材を最小化すると壁は円弧となる。さらに、Sachsの法則（Thompson, 1952）より、家の角を中心とする円弧となる場合に壁材が最小化されることがわかる。その結果、図11に示すように、2種類の仕切り方がある。図11aのような直線上の内壁と図11bのような円弧状の内壁のどち

らかが最適になるかは、以下の定理でわかる。

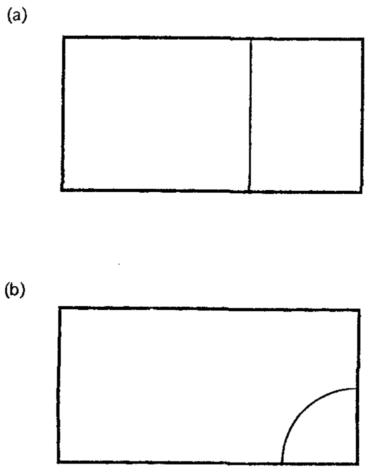


図11　長方形住宅の２部屋への分割

定理：壁材最小化の場合、$C<b^2/\pi$ ならば円弧状、$C>b^2/\pi$ ならば直線状の内壁となる。$C=b^2/\pi$ ならば、どちらでも同じである。

証明：内壁の長さが b を超えないならば、円弧状の場合が最小となる。これを用いると、上記の結論が導かれる。［証明終］

つまり、2部屋の大きさがさほど異ならない場合は、内壁最小化原理を適用して、最適な部屋の形状が長方形となる。

上記の問題設定は、部屋の長方形形状問題を簡単に解決するように見えるが、なぜ住宅が長方形でなければならないかという、新たな基礎的問題が残ってしまう。現実には、部屋よりも住宅に関してより多様な形状が存在することからも、住宅が長方形であるべきというのは、証明が困難な、というより正しいとは言えない命題だろう。

部屋の外形を規定する別の重要な要因としては、Steadman (1992) も指摘するように、住宅内に無駄なデッド・スペースを残さず、空間を有効に活用するために、住宅内の空間を部屋などによって完全に充填しなければならないという条件がある。空間充填という条件は極めて重要である。内壁の場合、ひとつの部屋の壁は、別の部屋の壁にもなる。このため、部屋の形状はかなり制限される。例えば、円形は空間充填の条件を満たさず、そのため部屋の形状には適さない。しかし、空間充填という条件もそれだけでは、部屋の形状を完全に限定することはできない。三角形、四角形、五角形、六角形などはもちろん、辺が直線分でなく曲線分の形状でもかまわないことになる。

部屋相互の間を円滑に移動できるために直線状の廊下が必要であるというのも別の要因として考えることができる。部屋が直線状の廊下に接して配置される場合には、部屋の一辺は必ず直線分となる。さらに、Sachsの法則から、内壁長を最小化する場合には廊下と部屋同士を仕切る内壁とは垂直でなければならない。このため、廊下に接した部分については、長方形の一部に近い形状になる傾向がある。この「廊下」を「道路」に置き換えて都市内の画地の形状に関する議論に焼き直せば、直線状道路の重要性がより明確となろう。

建物内に廊下を配さない地方もある。例えば、ヴェルサイユ宮殿のように、フランスの多くの城や宮殿では廊下がない。部屋が次々につなげられ、他の部屋に行く場合は、その間の部屋を全て通らなければならない。やや意外なことに、この場合の方がより直線的な通路が必要である。ある部屋を通り抜けたい場合には、その部屋での活動をなるべく妨げない必要がある。そのためには、部屋の中央部を通るのではなく、壁側を通るとよい。従って、道路を直線的に配し、それが各部屋の内壁に沿っているように設計すれば良いことになる。この設計では、直線的に部屋が連なった配置となる。

次に、部屋の内部に起因する形状決定条件について考えてみよう。部屋の角が鋭角だとすると、線分状の物を回転するのが困難となり、その角付近で物を動かすのはかなり拘束される。従って、角の内角はなるべく鋭角を避け、鈍角になる方が良い。従って、むしろ正六角形の部屋を並べる方が良くなる。

長方形の部屋では、角が直角で辺が直線状の家具ならば何でもある程度きれいに収まる。しかし、円形やさらに楕円形などとなると、曲率とか家具

の角の角度など、家具に要求されるパラメータの数が増大し、非常に煩雑となる。内部に設置する家具に要求される形状パラメータの少なさという点でも長方形の部屋は優れている。

我々の空間理解の仕方が直交システムとなっているという仮説も考えられる。たとえば、8角形の部屋は方向感覚を喪失しやすく、非常に認識しずらいし[11)]、ペンタゴンや要塞など、軍事上の建築物に5角形があるのも、敵の攻略を困難にさせる理由があると聞く。ただ、直交システムという空間認識の仕方が、先天的なものなのか、それとも現実にそのような空間システムの建物が多く、そこに生活した我々が後天的に学習した結果なのかはわからない。ただ、すでにそのような直交空間システムに慣れた我々にとっては、長方形で構成されるような空間システムが好まれるのは確かだろう。

6. おわりに

部屋や住宅の最適な形状について考察した。壁材消費を最小化する場合には、各部屋は円弧のパーツで構成され、それがつながった形で最適な住宅形状が導かれることが示された。活動自由度基準という小さな活動領域を動かして配置する自由度が最大となる形状についても分析した。活動自由度基準は、壁長最小化問題に帰着するが、部屋はやや離れて配置される傾向にあることが示された。

多くの部屋の基本形状は長方形である。そこで、なぜ長方形かという問題についても考察した。長方形の最適分割性、空間充填性、非鋭角性、直線性、形状パラメータの少ないことなどが、その理由として有力であった。それら、部屋や建物を構成する上での重要な原理をひとつひとつ検討して、なぜ長方形かという問題を理論的に解明していきたい。

謝 辞

Jean Serra教授、Tony E. Smith教授から有益なコメントをいただいた。また、本研究の一部は、文部省在外研究員としてCERAS, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (Paris, FRANCE) に滞在中に行った。その便宜を図っていただいた、岡部篤行教授、Jacques-F. Thisse教授および文部省に謝意を表する。

注

1) 本稿は、Asami (1997) の内容に基づき、加筆修正したものである。詳細な数学的演繹については、Asami (1997) を参照されたい。
2) Hildebrandt and Tromba (1986) 参照。この問題と類似の問題は、「最小面」という名称で長い間分析されてきた。例えば、Courant (1950)、Osserman (1969) などにその結果が述べられている。本問題とのひとつの大きな違いは、最小面問題では、「体積」条件（2次元では「面積」条件）がないことである。そのため最小面問題では、平均曲率は必ず0となるが、本問題で扱っている最小境界面では平均曲率は0と異なる可能性がある。
3) もしも$k=1$ならば、この問題は2次元における普通の最小境界面問題となる。
4) 内壁はひとつの線分で構成される。さもなければ、分かれている外壁を内壁につなげて、目的関数の値を改善することが可能である。さらに、内壁の線分は直線状となる。さもないと、線分を直線状にすることによって、目的関数の値を改善できる。
5) 厳密には、$k=0$のときは内壁が住宅を等面積の2部屋に2分している限り、どのような形状でも良い。従って、図3に示した例以外にも、2部屋が対象形でない場合も含めて無数の形状がある。
6) 内壁の最適形状は直線分とは限らないので、内壁の長さが$2a$に等しいとは言えない。
7) 厳密には、第2の配置パターンが第1の配置パターンよりも優れるのは$k>0$の場合である。$k=0$のときは、外壁長だけの最小化問題となり、基本的な最小境界問題に帰着し、どちらでも円形状の外壁となるため、どちらの配置パターンでも同じとなる。
8) ここでは、3つの部屋がすべて互いに合同である場合の解のみでてくる。$k=0$の場合には、住宅を3つの等面積の部屋に区切る分割配置ならばすべて最適配置となる。
9) 測度の定義より、各活動は互いに別々に行われることが暗黙に仮定されている。もしも複数の活動が同時に行われるならば、それらを共に部屋に納めなければならない。そのような場合の分析は今後の研究課題である。
10) この式は近似式である。厳密には、2つめの等号が成立するには、すべてのa_iの最大曲率が、Aの最小

曲率以下でなければならない。このような性質は、A が角を持っているような場合には成立しない。しかし、a_i の大きさが A に比べて十分に小さいときには、この式は比較的良好な近似となっている。

11) 東京大学の生産技術研究所の建物は8角形である。筆者を含め、多くの人が方向感覚を失った経験を持つ。

参考文献

Asami, Y., "On the Shape of Houses and Rooms" ***Environment and Planning B***, Forthcoming, 1997.

ベネーヴォロ，レオナルド『図説・都市の世界史－1』佐野敬彦、林寛治（訳）相模書房，1983.

Craggs, J. W., ***Calculus of Variations,*** George Allen & Unwin Ltd., London, 1973.

Courant, R., ***Dirichlet's Principle, Conformal Mapping and Minimal Surfaces***, Interscience, 1950.

Hilderbrandt, S. and Tromba, A., ***Mathematiques et Formes Optimales***, Pour la Science, Paris, 1986.

Intriligator, M. D., ***Mathematical Optimization and Economic Theory***, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1971.

日本土地区画整理協会『区画整理土地評価基準（案）』日本土地区画整理協会，1978.

March, L., "Elementary Models of Built Forms" in : L. Martin and L. March (eds) ***Urban Space and Structures***, Cambridge University Press, Cambridge, 1972.

Osserman, R., ***A Survey of Minimal Surfaces***, Van Nostrand, 1969.

Santaló, L. A., ***Integral Geometry and Geometric Probability***, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA., 1976.

Serra, J., ***Image Analysis and Mathematical Morphology***, vol. 1, Academic Press, London, 1982.

Steadman, P., "Geometry and Configuration in Design : The Form and Performance of Houses" ***Design:Principles and Practice***, The Open University, Walton Hall, Milton Keynes, 1992.

Takayama, A., ***Mathematical Economics***, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

Thompson, D. W., ***On Growth and Form***, 2nd ed., vol. II, Cambridge University Press, Cambridge, 1952.

吉阪隆正『住居学』相模書房，1965.

Key Words（キー・ワード）

Shape of Houses and Rooms（住宅・部屋の形状），Minimization of Boundary Length（境界長最小化），Activity-Freedom Criterion（活動自由度基準），Circle（円形），Rectangle（長方形）

The Circle and the Rectangle:Factors to Form Houses and Rooms

Yasushi Asami*

*Department of Urban Engineering, University of Tokyo
Comprehensive Urban Studies, No. 60, 1996, pp. 13 - 24

Planar shapes of houses and rooms are optimized. In reality, many of them are rectangular or circular in shape. A rational reason to select some particular shapes should exist to form these objects. The minimization of the wall material consumption yields rooms configured by several parts of circular arcs, in general. The activity-freedom criterion to maximize the freedom of movement of small activity area is introduced. The maximization of the activity-freedom criterion, measuring the freedom of allocating activity areas, can be basically reduced to the minimization of wall length problems, with the modification that rooms tend to be allocated farther. The dominance of rectangular rooms may be partly attributable to the optimality in partitioning, the space-filling property, the non-acuteness of corner angles, the linearity, and the fewness in the shape parameters.